Wave Modes Study for Acoustic VTI Equations

D.I. Sabitov (Skolkovo Institute of Science and Technology), M. Charara (Skolkovo Institute of Science and Technology), Y.A. Nikonenko (Skoltech, MIPT), A.A. Dotsenko* (Skolkovo Institute of Science and Technology)

SUMMARY

The application of reverse-time migration (RTM) on a large scale has become affordable and has led to significant advances in seismic depth imaging in complex areas, especially for sub-salt imaging. For imaging in anisotropic media with vertically transverse isotropy (VTI), RTM is usually based on an acoustic VTI approximation of the elastic wave equation by setting the vertical shear-wave velocity to zero. However, these equations generate artificial pseudo shear-waves that spoil any seismic imaging process. By studying the wave modes associated to that equation, we identify that a second mode exists for the anelliptic case, i.e., when the Thomsen parameters ϵ is different from δ . This mode generates the spurious pseudo shear-waves. We show that as long as the simulation of the P-wave propagation is consistent with the usual marine seismic wavelengths, the spurious pseudo-shear wave is not generated or very weak compared to the P-wave mode. We illustrate this fact, for the case of a homogeneous medium modelling and for the more realistic case of a 2D Salt body modelling.

Исследование волновых мод уравнения акустики для VTI-анизотропных сред

М. Шарара* (Сколтех), Д.И. Сабитов (Сколтех), Ю.А. Никоненко (Сколтех, МФТИ), А.А. Доценко (Сколтех)

Введение

В настоящее время применение обратной временной миграции (RTM) на задачах промышленного масштаба стало доступным, и, в сочетании с другими новыми технологиями, такими как широкополосные сейсмические съемки, оно привело к заметным успехам в построении глубинных сейсмических изображений в сложных средах, таких, как соляные купола. Для миграции в анизотропных средах с вертикально-поперечной изотропией (VTI) обычно используется акустическая VTI-аппроксимация волнового уравнения. Это позволяет избежать дополнительных усложнений волновой картины от S-волн и уменьшает количество уравнений по сравнению с полной эластической моделью. В геофизической литературе упомянутая аппроксимация обычно выводится из дисперсионного соотношения с применением предположения кусочно-постоянных свойств среды, в частности, ее плотности. Получаемые уравнения содержат громоздкие производные четвертого порядка (Alkhalifah, 2000) или дополнительные волновые моды неясной физической природы (Zhou et al., 2006). В работе Duveneck et al., 2008, предлагается вывод VTI волнового уравнения из основных соотношений, без каких-либо других предположений, кроме структуры анизотропии VTI (т.е., задания нулевой скорости волне SH). Такой подход приводит к получению уравнений первого порядка на компоненты скорости частицы и две независимые компоненты напряжений, и имеет четкое преимущество в том, что у всех переменных есть ясный физический смысл. Однако, в решениях этих уравнений присутствуют артефакты в виде псевдо-сдвиговых волн, которые портят сейсмические изображения. В данной работе исследуются причины возникновения этих артефактов и предлагается способ избежать появления нежелательных волн.

Анализ волновых мод для волнового уравнения VTI

Выпишем двумерные волновые уравнения для среды VTI, предложенные в работе Duveneck et al., 2008:

$$\begin{pmatrix} \partial_t^2 \sigma_{xx} \\ \partial_t^2 \sigma_{zz} \end{pmatrix} = V_P^2(0^\circ) \begin{bmatrix} 1 + 2\epsilon & \sqrt{1 + 2\delta} \\ \sqrt{1 + 2\delta} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x^2 \sigma_{xx} \\ \partial_z^2 \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где σ_{xx} и σ_{zz} – горизонтальные и вертикальные компоненты напряжений, $V_P(0^\circ)$ – скорость Р-волны в направлении оси симметрии, ϵ и δ – анизотропные параметры Томпсона (Thomsen, 1986). Для анализа волновых мод удобно применить к (1) двумерное пространственное преобразование Фурье 2D и получить

$$\begin{pmatrix} \partial_t^2 \tilde{\sigma}_{xx} \\ \partial_t^2 \tilde{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} = (2\pi)^2 V_P^2(0^\circ) \begin{bmatrix} -k_x^2(1 + 2\epsilon) & -k_z^2 \sqrt{1 + 2\delta} \\ -k_x^2 \sqrt{1 + 2\delta} & -k_z^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где k_x и k_z – горизонтальное и вертикальное волновые числа, матрица A :

$$A = \begin{bmatrix} -k_x^2(1 + 2\epsilon) & -k_z^2 \sqrt{1 + 2\delta} \\ -k_x^2 \sqrt{1 + 2\delta} & -k_z^2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

содержит информацию о пространственном распространении волн. Найдем ее собственные числа:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{1}{2} \left(-k_x^2(1+2\epsilon) - k_z^2 - \sqrt{(k_x^2(1+2\epsilon) + k_z^2)^2 + 2k_x^2k_z^2(4\delta - 4\epsilon)} \right) \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(-k_x^2(1+2\epsilon) - k_z^2 + \sqrt{(k_x^2(1+2\epsilon) + k_z^2)^2 + 2k_x^2k_z^2(4\delta - 4\epsilon)} \right)\end{aligned}\quad (4)$$

Рассмотрим два важных частных случая:

- случай изотропной среды: $\epsilon = 0$ и $\delta = 0$,

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= -k_x^2 - k_z^2 \\ \Lambda_2 &= 0\end{aligned}$$

- эллиптическая анизотропия: $\epsilon = \delta$

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= -k_x^2(1+2\epsilon) - k_z^2 \\ \Lambda_2 &= 0\end{aligned}$$

В этих частных случаях первое собственное число отвечает за моду Р-волны, и поскольку второе собственное число тождественно равно нулю, достаточно одного скалярного уравнения для описания распространения волн. Однако, для общей неэллиптической анизотропии VTI ($\epsilon \neq \delta$), второе собственное число не равно нулю (Рисунок 1), и оно отвечает за распространение дополнительной, нефизической, моды.

Рисунок 1 Слева - первое волновое число, справа – второе волновое число для неэллиптического случая ($\epsilon = 0.25$ и $\delta = 0$) с шагом по пространству $\Delta = \Delta x = \Delta z = 10$ м. В отличие от изотропного и эллиптического случая, второе волновое число не равно 0. Поэтому возможно возбуждение нефизической моды.

Источник и отклик в однородной VTI среде

В морской сейсморазведке скорость Р-волны больше, чем скорость звука в воде $V_{Pmin} = 1500$ м/сек, а максимальная частота источника порядка $f_{max} = 60$ Гц при центральной частоте около $f_c = 25$ Гц. При распространении волн вглубь Земли скорость Р-волны увеличивается с глубиной, а частоты сигнала уменьшаются из-за затуханий. Переводя эти факты на язык волновых чисел, получим, что волновое число уменьшается в процессе распространения волны вглубь Земли. Говоря точнее, максимум волнового числа есть $k_{max} = \frac{f_{max}}{V_{Pmin}} = \frac{60}{1500} = 0.04$ м⁻¹, а число, соответствующее центральной частоте, суть $k_c = \frac{f_c}{V_{Pmin}} = \frac{25}{1500} \approx 0.02$ м⁻¹. Волновые уравнения для VTI обычно решаются методом конечных разностей с пространственным шагом $\Delta = \Delta x = \Delta z = 10$ м, чтобы учитывать расстояние между приемниками. Таким образом, максимальное возможное значение для волнового числа будет $k_{max} = \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{2 \times 10} = 0.05$ м⁻¹.

Обычно в литературе (например, Duveneck et al., 2008) используется точечный источник для генерации сигнала. Волны от такого источника содержат моды одинаковой амплитуды для всех волновых чисел до $k_{max} = 0.05 \text{ м}^{-1}$. Поэтому псевдо-сдвиговая мода возбуждается наравне с обычными, особенно принимая во внимание, что собственное число для этой моды увеличивается для больших значений волновых чисел (Рисунок 1, справа). Однако, на практике мы работаем только с основными волновыми числами, со значениями менее 0.02 м^{-1} .

В качестве иллюстрации этого тезиса мы провели вычислительные эксперименты для среды $c_{VP}(0^\circ) = 1500 \text{ м/сек}$, $\epsilon = 0.25$ и $\delta = 0$. В качестве источника был выбран вейвлет Рикера с центральной частотой $f_c = 25 \text{ Гц}$ (Рисунок 2). Если мы используем точечный источник (дельта-функцию по пространству), мы возбудим Р-волну, и нефизичную псевдо-сдвиговую моду (Рисунок 2, слева). При использовании той же временной зависимости для источника, но с пространственным распределением в виде гауссианы со стандартным отклонением $\sigma = 2\Delta$, мы не возбуждаем нефизичную моду (Рисунок 2, средний), но мы будем иметь дело с заниженным значением центрального волнового числа. Для компенсации снижения центральной частоты мы используем то же распределение источника по пространству, но одновременно повысим центральную частоту до $f_c = 35 \text{ Гц}$. В этом случае у нас будет примерно то же центральное волновое число, но не возбуждаем нефизичную моду (Рисунок 2, справа).

Рисунок 2 Волновые поля давления $P = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$ при $T=0.6$ сек для VT-Исходной среды ($V_p(0^\circ) = 1500 \text{ м/сек}$, $\epsilon=0.25$ и $\delta=0$) для источника Рикера: слева, расчет для точечного источника с центральной частотой 25 Гц; возбуждается нефизичная мода; средний, с гауссовым распределением источника с той же частотой 25 Гц; нефизичная мода не возбуждается, но центральное волновое число для Р-волны пониженное; справа, то же пространственное распределение источника с центральной частотой 35 Гц; центральное волновое число почти то же, что в первом случае, но нефизичная мода не возбуждается.

2D-моделирование диапира

Модельная задача (Рисунок 3, верх) содержит изотропный диапир ($V_p = 6000 \text{ м/сек}$), водяной слой ($V_p = 1500 \text{ м/сек}$) и два анизотропных (VTI) осадочных слоя ($V_p(0^\circ) = 2000 \text{ м/сек}$, $\epsilon = 0.24$) и ($V_p(0^\circ) = 3000 \text{ м/сек}$, $\epsilon = 0.25$). Источник – точечный вейвлет Рикера с центральной частотой $f_c = 25 \text{ Гц}$. Поскольку водный слой анизотропный, нефизичная мода не возбуждается, а большие волновые числа отфильтровываются в процессе распространения волны. Мы провели два численных эксперимента: для эллиптической анизотропии $\epsilon = \delta$ (Рисунок 3, слева внизу) для сравнения, поскольку нефизичной моды не образуется, и другое, более сложное, при $\delta = 0$ (Рисунок 3, справа внизу). Согласно теории, снимки волновых полей должны быть одинаковыми, с небольшими различиями во временах прихода для различных фаз. Именно эту картину мы и наблюдаем, что означает, что никаких значимых псевдо-сдвиговых волн не возбуждается.

Выводы

Для общего неэллиптического случая VTI ($\epsilon \neq \delta$), второе собственное число волновых уравнений для VTI не равно нулю, и это является причиной возбуждения псевдо-сдвиговой моды. Если мы не имеем дело с большими волновыми числами, например, с аккуратностью подходим к моделированию морской сейстики с использованием обычных длин волн, псевдо-сдвиговая мода не возбуждается, или ее амплитуда слишком мала по сравнению с Р-волной.

Рисунок 3 Верхний ряд, параметры моделирования 2D диагра: слева скорость Р-волны, справа параметр Томпсона ϵ . Нижний ряд, волновые поля давления для $T=1.3$ сек для случаев: слева $\epsilon = \delta$ (нет нефизической моды), справа $\delta = 0$ (возможна нефизическая мода). Согласно теории, снимки волновых полей должны быть одинаковыми, с небольшими различиями во временах прихода для различных фаз. Именно это и наблюдается, что означает, что нефизическая мода не возбуждается.

Библиография

- Alkhalifah, T. [2000] An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, 65(4), 1239–1250.
- Duveneck, E., P. Milcik, P. M. Bakker, and C. Perkins [2008] Acoustic VTI wave equations and their application for anisotropic reverse-time migration. *78th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, 2186–2190.
- Thomsen, L. [1986] Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**, 1954–1966.
- Zhou, H., Zhang, G. and Bloor, R. [2006] An Anisotropic Acoustic Wave Equation for VTI Media. *68th EAGE Conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2006*.

References

- Alkhalifah, T. [2000] An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, 65(4), 1239–1250.
- Duveneck, E., P. Milcik, P. M. Bakker, and C. Perkins [2008] Acoustic VTI wave equations and their application for anisotropic reverse-time migration. *78th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, 2186–2190.
- Thomsen, L. [1986] Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**, 1954–1966.
- Zhou, H., Zhang, G. and Bloor, R. [2006] An Anisotropic Acoustic Wave Equation for VTI Media. *68th EAGE Conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2006*.